1 Derivace funkce

Derivace funkce v bodě. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \text{ jiný zápis } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

pak toto číslo nazýváme *derivací funkce f v bodě* x_0 a označujeme ji $f'(x_0)$.

Geometrický význam derivace. Hodnota $f'(x_0)$ je *směrnicí tečny* ke grafu funkce f sestrojené v bodě $[x_0; f(x_0)]$.
Rovnice této tečny je: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Přímkou kolmou ke grafu funkce f v bodě $[x_0; f(x_0)]$ nazýváme *normálou*, její rovnice je:

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Derivace elementárních funkcí:

$[k]' = 0$, je-li k konstantní funkce, $\quad [x^a]' = a\cdot x^{a-1}$,

$$[\sin x]' = \cos x, \qquad [\cos x]' = -\sin x,$$

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad [\operatorname{cotg} x]' = \frac{-1}{\sin^2 x},$$

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad [\arccos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad [\operatorname{arccotg} x]' = \frac{-1}{1+x^2},$$

$$[a^x]' = a^x\cdot\ln a, \text{ pro } a>0, \qquad [\log_a x]' = \frac{1}{x\cdot\ln a}, \text{ pro } a>0, a\neq 1,$$

$$[e^x]' = e^x, \qquad [\ln x]' = \frac{1}{x}.$$

Uvedené vzorce platí na definičních oborech jednotlivých elementárních funkcí.
Pozn.: Eulerova konstanta $e = 2,71828\ldots$.

Derivace součinu funkcí $\quad (u.v)' = u'.v + u.v'$.

Derivace podílu funkcí $\quad \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$, příp. : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Derivace složené funkce $\quad \{f[g(x)]\}' = f'[g(x)].g'(x)$.

2 Neurčitý integrál

Primitivní funkce

Funkci F nazýváme *primitivní funkcí* k funkci f na intervalu $< a, b >$, jestliže $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in < a, b >$.
Je-li F primitivní funkce k funkci f na intervalu $< a, b >$, pak píšeme $\int f(x)dx = F(x) + c$, kde $c \in \mathbf{R}$ je integrační konstanta.

Tabulka integrálů elementárních funkcí

$$\int 0 \,\mathrm{d}x = C \qquad \int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \in \mathbf{R}, \alpha \neq -1)$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C \qquad \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{cotg}\, x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,dx = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\, x + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{arccotg}\, x + C$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, (\text{pro}\, a > 0, a \neq 1) \qquad \int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln \mid x \mid + C$$

Uvedené vzorce platí na definičních oborech jednotlivých elementárních funkcí.

Věta o integraci metodou per-partes.

Mají-li funkce u a v spojitou derivaci na intervalu $< a, b >$, pak na tomto intervalu platí:

$$\int u'.v \,\mathrm{d}x = u.v - \int u.v' \,\mathrm{d}x.$$

Věta o integraci substituční metodou

Pokud lze funkci $f(x)$ vyjádřit na intervalu (a, b) ve tvaru $f(x) = g(h(x))h'(x)$, kde $h'(x)$ je spojitá v intervalu (a, b) a $g(z)$ je spojitá pro všechna $z = h(x)$, pak pro $x \in (a, b)$ platí

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(h(x))h'(x)\mathrm{d}x = \int g(z)\mathrm{d}z = G(z) + C = G(h(x)) + C,$$

3 Určitý integrál

Výpočet určitého integrálu

Je-li F primitivní funkce k funkci f na intervalu $< a, b >$, pak píšeme

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Určitý integrál na intervalu $< a, b >$je obsah plochy ohraničené grafem funkce $f(x)$ a osou x na intervalu od a do b.

Pozn.: Pro výslednou velikost obsahu plochy není podstatné, zda je interval od a do b uzavřený nebo otevřený.